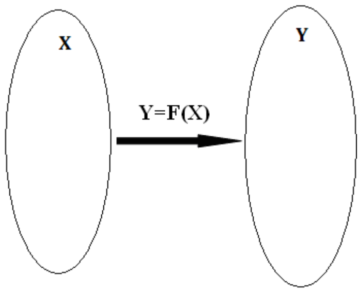
Μετασχηματισμοί τυχαίων μεταβλητών

Το θεώρημα πάνω στο οποίο βασίζεται η μέθοδος μετασχηματισμού είναι το λεγόμενο θεώρημα μετασχηματισμού ολοκληρώματος πιθανότητας (***Probability Integral Theorem***). Σύμφωνα με αυτό:

Έστω X τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση αθροιστικής πιθανότητας $F_X(x)$. Αν $Y= F_X(x)$, τότε αυτή ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0,1).[1]



Στην περίπτωση που η F_X είναι αντιστρέψιμη, μπορούμε να παράγουμε ακολουθία αριθμών που να ακολουθεί την κατανομή αυτή μέσω της σχέσης:

$$X = F_X^{-1}(Y)$$

Απαραίτητη προϋπόθεση είναι να αντιστρέφεται η F_X. Με βάση αυτό το θεώρημα έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

- **Exponential distribution**

$$x = F_Y(y) = 1 - e^{-\lambda y} \rightarrow y = -\frac{1}{\lambda} ln(1-x)$$

με

$$x \in (0,1) \kappa \alpha \iota y \in (0,\infty)$$

Αν θελήσουμε να πάρουμε αντίστοιχη κατανομή στο διάστημα $(0,y_{max})$, τότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την αντίστοιχη αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας. Για την περίπτωση που μας ενδιαφέρει έχουμε συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_Y(y) = \frac{\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{y}{\lambda}}}{1 - e^{-\frac{y_{max}}{\lambda}}}$$

Η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας λαμβάνεται από τη σχέση:

[1] Για την ακριβή απόδειξη του θεωρήματος, ανατρέξτε στο G. CASELLA AND R. L. BERGER, Statistical Inference, Brooks/Cole, Pacific Grove, 1990.

$$F_Y(y) = \int_0^y f_Y(y')dy' = \int_0^y \frac{\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{y'}{\lambda}}}{1-e^{-\frac{y_{max}}{\lambda}}}$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, αν θέλουμε να πάρουμε τυχαίους αριθμούς στο διάστημα [y_{min},y_{max}], αυτοί θα δίνονται από τη σχέση:

$$y = ln[(e^{y_{max}} - e^{y_{min}})x + e^{y_{min}}]$$

- **Power law distribution**

Με βάση την προηγούμενη λογική, ας προσπαθήσουμε να αναπαράγουμε τη σχέση που θα δίνει power law κατανομή από ομοιόμορφη. Αν

$$f_Y(y) = Cy^{-\gamma}$$

τότε

$$F_Y(y) = \int_{y_{min}}^y f_Y(y')dy' = \int_{y_{min}}^y Cy'^{-\gamma}dy' = \frac{C}{1-\gamma}(y^{1-\gamma} - y_{min}^{1-\gamma})$$

Επίσης

$$F_Y(y_{max}) = 1 \rightarrow C = (1-\gamma)\frac{1}{(y_{max}^{1-\gamma} - y_{min}^{1-\gamma})}$$

Άρα

$$x = F_Y(y) = \frac{1}{1-\gamma}(y^{1-\gamma} - y_{min}^{1-\gamma})$$

Έτσι, η σχέση με βάση την οποία θα παραχθούν τυχαίοι αριθμοί που ακολουθούν power law κατανομή είναι

$$y = [(y_{max}^{1-\gamma} - y_{min}^{1-\gamma})x + y_{min}^{1-\gamma}]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

με γ≠1