Τυχαίοι Αριθμοί

Σε πάρα πολλές εφαρμογές είναι απαραίτητη η χρήση τυχαίων αριθμών για την περιγραφή ενός φυσικού φαινομένου. Προκύπτει όμως το ερώτημα της εύρεσης αυτών των τυχαίων αριθμών με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι άμεσα διαθέσιμοι τη στιγμή που τους χρειαζόμαστε.

Ο σωστός τρόπος για να πάρουμε καθαρά τυχαίους αριθμούς είναι να μετρήσουμε κάποια στοχαστική διαδικασία, όπως για παράδειγμα το χρόνο μεταξύ δύο διαδοχικών διασπάσεων μιας ραδιενεργής πηγής, και να μεταφέρουμε τα αποτελέσματα της στον υπολογιστή μας. Αυτό όμως δεν είναι και τόσο πρακτικό, οπότε θα πρέπει να αναζητήσουμε κάποιο εναλλακτικό τρόπο με τον οποίο να δημιουργούμε τυχαίους αριθμούς στον υπολογιστή μας όποτε τους χρειαστούμε.

Οι υπολογιστές όμως είναι μηχανές που δουλεύουν με τελείως ντετερμινιστικό τρόπο, οπότε τελικά το σύνολο των αριθμών που θα προκύψουν από μια τέτοια μηχανή δε θα είναι τελείως τυχαίο. Για το λόγο αυτό τους αριθμούς αυτούς τους ονομάζουμε ψευδοτυχαίους αριθμούς.

Υπάρχει όμως και ένα άλλο εμπόδιο που πρέπει να αντιμετωπίσουμε. Αφού οι αριθμοί που χρησιμοποιούνται από τους υπολογιστές έχουν πεπερασμένο αριθμό δεκαδικών ψηφίων (συνήθως είναι δυαδικοί αριθμοί με k ψηφία, με $16 \leq k \leq 60$), μία μεταβλητή x δε θα είναι ποτέ συνεχής αλλά πάντα διακριτή και θα έχει τη μορφή

$$x = x^{(0)}2^0 + x^{(1)}2^1 + ... + x^{(k-1)}2^{k-1}. \tag{1}$$

Αν υπάρχει τρόπος να επιλέξουμε όλα τα $x^{(j)}$ τυχαία με μία κατανομή που δίνει τις τιμές 0 και 1 με πιθανότητα $1/2$, τότε οι τιμές της μεταβλητής x περιγράφονται από μία διακριτή κατανομή και θα μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε από τις 2^k τιμές

$$x = 0, 1, 2, ..., 2^{k-1} \tag{2}$$

με την ίδια πιθανότητα. Αν τώρα κάνουμε το μετασχηματισμό $x' = x/2^k$ θα πάρουμε μία κατανομή 2^k αριθμών στο διάστημα $[0, 1)$. Μία τέτοια κατανομή ονομάζεται quasiuniform.

Αφού λοιπόν, όπως αναφέραμε, οι υπολογιστές δουλεύουν με ντετερμινιστικό τρόπο κάθε νέος τυχαίος αριθμός που δημιουργείται θα είναι συνάρτηση των προηγούμενων

$$x_j = f(x_{j-1}, x_{j-2}, ..., x_1). \tag{3}$$

Μια τέτοια σχετικά απλή συνάρτηση είναι η

$$x_j = (ax_{j-1} + c) \text{ modulo } 2^{\mathrm{k}}, \tag{4}$$

όπου ο συμβολισμός α modulo μ σημαίνει το υπόλοιπο της διαίρεσης α/μ. Βέβαια μια συνάρτηση σαν την (4) τελικά θα οδηγήσει στην επανάληψη των ίδιων τυχαίων αριθμών μετά από το πολύ 2^k βήματα.[1] Αναφέρουμε για παράδειγμα ότι για $a = 5$ και $c = 13$ η περίοδος είναι 4096, στην πράξη όμως χρησιμοποιούνται πολύ μεγαλύτερες περίοδοι.

Στη συνέχεια ακολουθεί ένα διάγραμμα (σχήμα 1) που δείχνει τον τρόπο λειτουργείας μιας γεννήτριας τυχαίων αριθμών, όπου ο πρώτος αριθμός (seed) δίνεται εξωτερικά και οι υπόλοιποι υπολογίζονται από τη σχέση (4).

Πολλές φορές χρειάζεται να δημιουργήσουμε τυχαίους αριθμούς που ακολουθούν μια συγκεκριμένη μη κανονική κατανομή πιθανότητας. Ένας τρόπος για να το επιτύχουμε αυτό είναι η μέθοδος μετασχηματισμού (transformation method) την οποία θα περιγράψουμε στη συνέχεια.

Transformation method

Θεωρούμε μια συλλογή μεταβλητών $\{x_1, x_2, ...\}$ που είναι κατανεμημένες σύμφωνα με τη συνάρτηση κατανομής $P_x(x)$, οπότε η πιθανότητα να βρούμε μια τιμή στο διάστημα $(x, x + dx)$ είναι $P_x(x)dx$. Αν τώρα η y είναι μια συνάρτηση του x, $y = f(x)$, και η συλλογή μεταβλητών $\{y_1, y_2, ...\}$ περιγράφεται από τη συνάρτηση κατανομής $P_y(y)$,τότε θα ισχύει

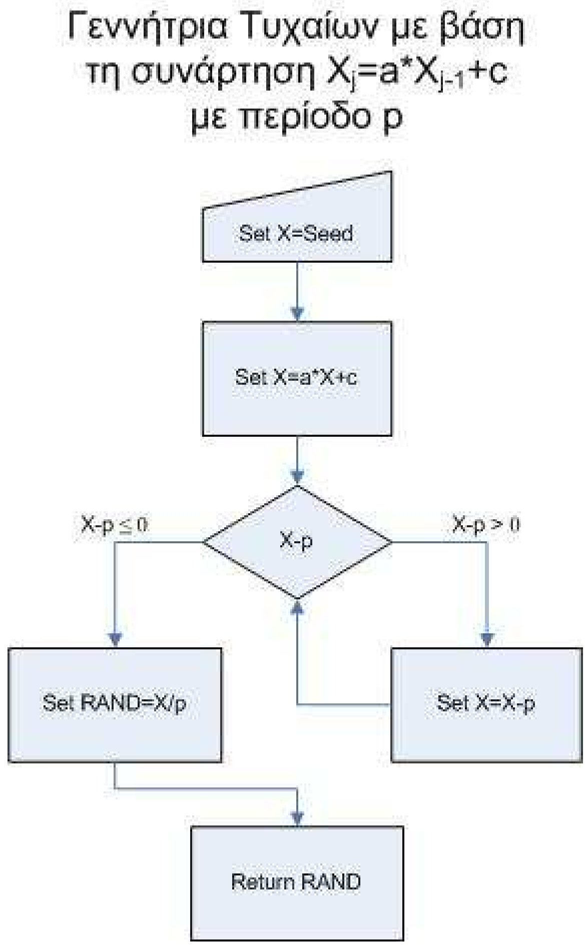
$$|P_x(x)dx| = |P_y(y)dy| \,. \tag{5}$$

Στην περίπτωση που η μία από τις δύο συλλογές, έστω αυτή των x, δημιουργείται από μία γεννήτρια τυχαίων αριθμών που δίνει ομοιόμορφα κατανεμημένους αριθμούς, τότε η συνάρτηση κατανομής που περιγράφει αυτή τη συλλογή θα είναι σταθερή, δηλαδή $P_x(x)$, και θα ισχύουν τα ακόλουθα:

$$P_y(y) = P_x(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| \tag{6}$$

$$P_y(y) = C \left| \frac{dx}{dy} \right| . \tag{7}$$

[1] Μπορεί να αποδειχθεί ότι για συγκεκριμένες τιμές των a, c και k αυτή η μέγιστη περίοδος μπορεί να επιτευχθεί.



Σχήμα 1: Σχηματική αναπεράσταση του τρόπου λειτουργείας μιας γεννήτριας τυχαίων αριθμών.

Η μέθοδος αυτή γενικεύεται και για την περίπτωση περισσότερων διαστάσεων. Αν $x_1, x_2...$ είναι τυχαίοι αριθμοί με κοινή κατανομή πιθανότητας $p(x_1, x_2...)dx_1, dx_2...$ και $y_1, y_2...$ είναι συναρτήσεις όλων των x, τότε η κοινή κατανομή πιθανότητας των y δίνεται από τη σχέση

$$p(y_1, y_2...)dy_1, dy_2... = p(x_1, x_2...) \left| \frac{\partial(x_1, x_2...)}{\partial(y_1, y_2...)} \right| dx_1, dx_2... \qquad (8)$$

όπου με $\left|\frac{\partial()}{\partial()}\right|$ συμβολίζεται η Ιακωβιανή ορίζουσα των x ως προς y.

Στη συνέχεια θα δείξουμε πως εφαρμόζεται η μέθοδος αυτή για την περίπτωση που θέλουμε να υπολογίσουμε τυχαίους αριθμούς με κατανομή power law και με κανονική κατανομή.

Κατανομή power law

Έστω ότι έχουμε μια γεννήτρια τυχαίων αριθμών που δίνει ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0,1] και θέλουμε από αυτή να πάρουμε τυχαίους αριθμούς με κατανομή power law που περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$P_y(y) = Cy^{-\gamma}, \qquad y \in [y_{min}, y_{max}]. \qquad (9)$$

Η κατανομή της πιθανότητας για να πάρουμε από αυτή τη γεννήτρια έναν αριθμό στο διάστημα $x + dx$ θα δίνεται από τη σχέση

$$P_x(x)dx = \begin{cases} dx, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad (10)$$

Η $P_x(x)$ είναι κανονικοποιημένη, ώστε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_x(x)dx = 1. \qquad (11)$$

Σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω θα πρέπει να ισχύει

$$\begin{aligned} P_y(y) &= \left|\frac{dx}{dy}\right| \\ dx &= P_y(y)dy \\ x &= \int_{y_{min}}^{y} P_y(y')dy' \\ x &= C\int_{y_{min}}^{y} y'^{-\gamma}dy' \end{aligned}$$

$$x = C\left.\frac{y'^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right|_{y_{min}}^{y} = C\left(\frac{y^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{y_{min}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right), \qquad \gamma \neq 1 \tag{12}$$

και λύνοντας ως προς y προκύπτει ότι θα πάρουμε την επιθυμητή κατανομή κάνοντας το μετασχηματισμό

$$y = \sqrt[1-\gamma]{\frac{(1-\gamma)x}{C} + y_{min}^{1-\gamma}} \tag{13}$$

Στον παραπάνω όμως τύπο δεν γίνεται σαφής αναφορά στο ποια θα είναι η μέγιστη τιμή της κατανομής που θα πάρουμε, δηλαδή το y_{max} του ζητούμενου διαστήματος. Αυτό αντιμετωπίζεται σχετικά εύκολα αφού γνωρίζουμε ότι τη μέγιστη τιμή του y θα την πάρουμε όταν $x = 1$. Θα ισχύει λοιπόν

$$y_{max} = \sqrt[1-\gamma]{\frac{1-\gamma}{C} + y_{min}^{1-\gamma}} \Rightarrow$$
$$\frac{1-\gamma}{C} = y_{max}^{1-\gamma} - y_{min}^{1-\gamma},$$

και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα αυτό στη σχέση (13) παίρνουμε τελικά ότι

$$y = \sqrt[1-\gamma]{(y_{max}^{1-\gamma} - y_{min}^{1-\gamma})x + y_{min}^{1-\gamma}}. \tag{14}$$

Παράδειγμα

Θα δημιουργήσουμε στη συνέχεια τυχαίους αριθμούς που να περιγράφονται από τη συνάρτηση κατανομής

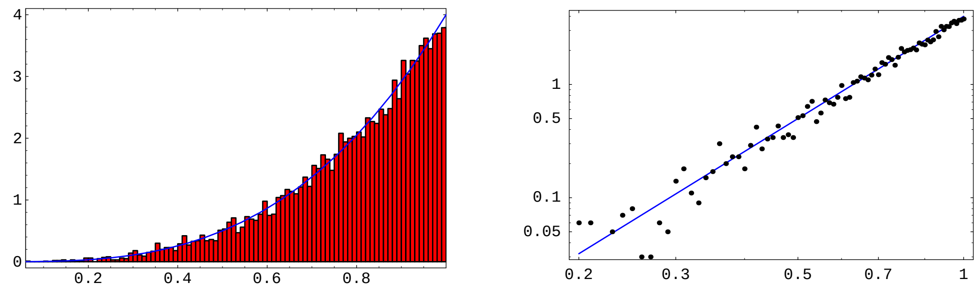
$$P_y(y) = 4y^3 \tag{15}$$

χρησιμοποιώντας μια γεννήτρια τυχαίων αριθμών που δίνει ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0,1].

Εφαρμόζοντας στη συνάρτηση κατανομής τη σχέση (13) προκύπτει ο μετασχηματισμός

$$y = \sqrt[4]{x} \tag{16}$$

με τον οποίο παίρνουμε την κατανομή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



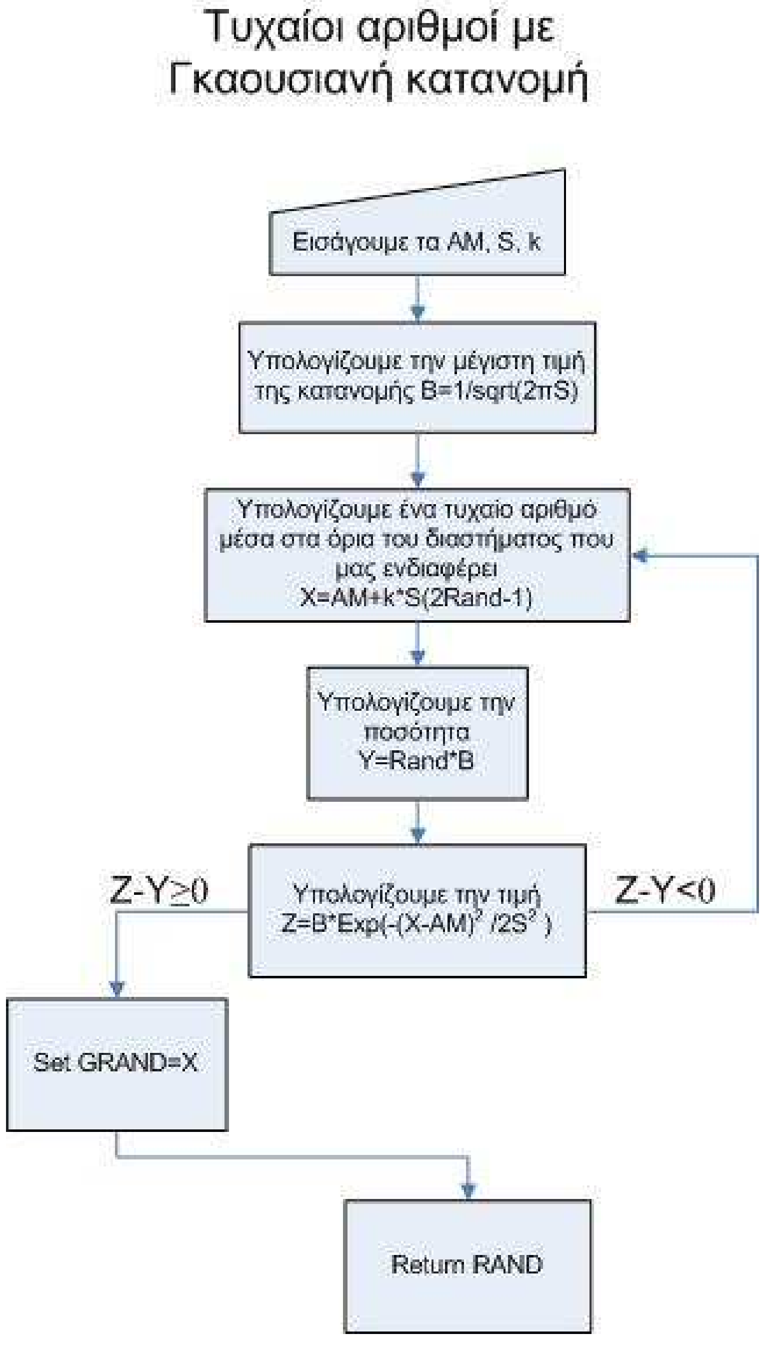
Σχήμα 2: Η power law κατανομή τυχαίων αριθμών.

Rejection Method

Η μέθοδος που περιγράψαμε παραπάνω δουλεύει καλά για την περίπτωση που η συνάρτηση της κατανομής που μας ενδιαφέρει είναι αντιστρέψιμη. Όμως και στην περίπτωση της μη αντιστρέψιμης συνάρτησης κατανομής $p_y(y)$, πάλι μπορούμε να πάρουμε τυχαίους αριθμούς που να περιγράφονται από αυτή. Για να το πετύχουμε αυτό χρησιμοποιούμε τη λεγόμενη rejection method η οποία έχει ως εξής

- Υπολογίζουμε τη μέγιστη τιμή $p_{y(max)}$ που παίρνει η συνάρτηση κατανομής στο διάστημα που μας ενδιαφέρει
- Υπολογίζουμε ένα τυχαίο αριθμό y_r ομοιόμορφα κατανεμημένο μέσα σε αυτό το διάστημα
- Υπολογίζουμε ένα τυχαίο αριθμό Y ομοιόμορφα κατανεμημένο στο διάστημα $[0, p_{y(max)}]$
- Υπολογίζουμε την τιμή του τυχαίου αριθμού $Z = p_y(y_r)$
- Αν $Z \geq 0$ δεχόμαστε τον τυχαίο αριθμό X, αν $Z < 0$ τον απορρίπτουμε και υπολογίζουμε ένα καινούριο.

Η διαδικασία αυτή φαίνεται σε μορφή διαγράμματος ροής στο σχήμα 3 για την περίπτωση της κανονικής κατανομής με μέση τιμή μ=AM σ=S, όπου θέλουμε οι τυχαίοι αριθμοί να βρίσκονται μέσα στο διάστημα $(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$.

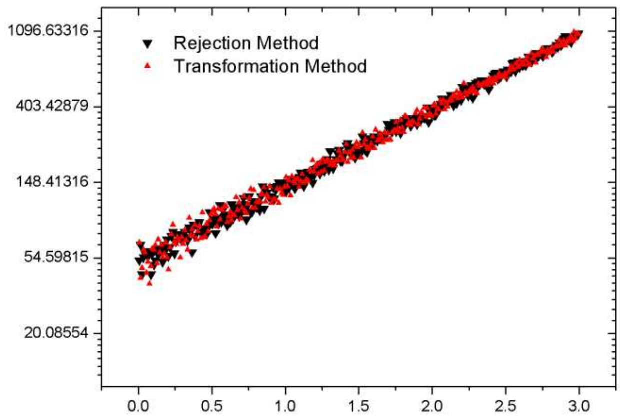


Σχήμα 3: Εφαρμογή της rejection method για την περίπτωση της κανονικής κατανομής με μέση τιμή μ=AM σ=S, όπου θέλουμε οι τυχαίοι αριθμοί να βρίσκονται μέσα στο διάστημα $(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$.

Τέλος παρουσιάζουμε, για σύγκριση των δύο μεθόδων, στο ίδιο σχήμα (σχήμα 4) τυχαίους αριθμούς κατανεμημένους με εκθετική κατανομή όπως αυτοί παρήχθηκαν με εφαρμογή του τύπου

$$y = ln\left[\left(e^{y_{max}} - e^{y_{min}}\right)x + e^{y_{min}}\right], \tag{17}$$

ο οποίος προκύπτει από την transformation method, και με εφαρμογή της rejection method και βλέπουμε ότι τα αποτελέσματά μας σχεδόν ταυτίζονται. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι και οι δύο αυτές μέθοδοι είναι ισοδύναμες και μπορούμε να τις χρησιμοποιούμε κατά περίπτωση.



Σχήμα 4: Τυχαίοι αριθμοί με εκθετική κατανομή.